

ÜBUNGSKLAUSUR:

Name	
Datum	
Fach	Mathematik

Anzahl Punkte	
Erreichte Punkte	
Note	

Erlaubte Hilfsmittel:

- ☒ Taschenrechner
- ☐ Formelsammlung
- ☒ Geodreieck

- ☐ Zirkel
- ☐ Duden
- ☐ ...

Lies dir zunächst alle Aufgaben gründlich durch, und stelle sicher, dass du die Aufgabenstellung verstehst.

Aufgabe 1

Berechne jeweils alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen der nachfolgenden Funktionen.

- a) $f(x) = 4x + 2$
- b) $f(x) = 4x^2 + 2x - 8$
- c) $f(x) = (2x - 1)(x + 2)^2$
- d) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2$

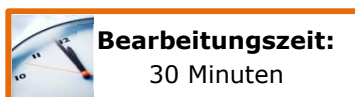
Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = 4x^2 + 6x - 5$ und $g(x) = 2x + 2$. Bestimme ob, und wenn ja wo (an welchen Koordinaten) sich die beiden Funktionen schneiden.

Aufgabe 3

Ein Industriebetrieb hat fixe Herstellungskosten von 20.000,-- € in einer Abrechnungsperiode. Für die Herstellung eines Werkstückes fallen zusätzlich variable Kosten in Höhe von 7,50 € an. Die Werkstücke werden zu einem Preis von 15,00 € pro Stück verkauft.

- a) Stelle die Kosten- und die Erlösfunktion des Betriebes auf.
- b) Berechne bei welcher Ausbringungsmenge der Betrieb seine Nutzenschwelle erreicht.
- c) Zeichne die Graphen der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem mit geeigneter Skalierung.



LÖSUNGSSKIZZE:

Auf den folgenden Seiten wird ein Möglicher Lösungsansatz für die Klausur vorgestellt.

Lösung Aufgabe 1:

Generell müssen bei Aufgabe für jede der gegebenen Funktionen alle Nullstellen und der Schnittpunkt mit der Y-Achse berechnet werden. Die Nullstellen werden ermittelt, indem die Funktion $f(x) = 0$ gesetzt wird. Der Schnittpunkt mit der Y-Achse wird ermittelt, indem $x = 0$ gesetzt wird.

Bei der Funktion von Aufgabe a handelt es sich um eine einfache Lineare Funktion. Die Nullstelle kann Berechnet werden, indem der Schüler einfach die Funktion durch Äquivalenzumformungen nach x umstellt.

a) $f(x) = 4x + 2$

① Nullstellen:

$$\begin{aligned} 0 &= 4x + 2 & | -2 \\ -2 &= 4x & | :4 \\ -\frac{2}{4} &= x \\ -\frac{1}{2} &= x & \mathcal{N}_1(-\frac{1}{2} | 0) \end{aligned}$$

② Y-Achsen-Abschnitt:

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \cdot 0 + 2 \\ \underline{f(0) = 2} & \quad S_y = (0 | 2) \end{aligned}$$

Dieser Einfach Ansatz funktioniert bei Teilaufgabe b nicht mehr ohne weiteres, da es sich hier um eine quadratische Funktion handelt. Hier muss der Schüler für die Lösung die p-q-Formel anwenden. Er erhält hierdurch zwei Ergebnisse für die Nullstelle.

b) $f(x) = 4x^2 + 2x - 8$

① Nullstellen:

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2 + 2x - 8 & | :4 \\ 0 &= x^2 + \frac{1}{2}x - 2 & | \Rightarrow p-q\text{-Formel} \end{aligned}$$

$$x_{1/2} = -\frac{\frac{1}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2 + 2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm 1,436...$$

$$x_1 = -\frac{1}{4} + 1,436 = \underline{\underline{1,186}} \quad \mathcal{N}_1(1,186 | 0)$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} - 1,436 = \underline{\underline{-1,686}} \quad \mathcal{N}_2(-1,686 | 0)$$

② Y-Achsen-Abschnitt

$$f(0) = 4 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 8$$

$$\underline{\underline{f(0) = -8}} \quad S_y(0 | -8)$$

ÜBUNGSKLAUSUR:

Die Lösung von Teilaufgabe c erfordert schon etwas mehr Kreativität. Zunächst muss der Schüler die Funktion, so umstellen, dass sie in der Normalform vorliegt. Hierzu ist es erforderlich die gegebenen Klammern aus zu multiplizieren. Dieser Schritt wird erleichtert, wenn der Schüler mit den binomischen Formeln vertraut ist.

$$\begin{aligned} c) \quad f(x) &= (2x-1)(x+2)^2 \\ &= (2x-1)(x^2+4x+4) \\ &= 2x^3+8x^2+8x-x^2-4x-4 \\ &= 2x^3+7x^2+4x-4 \end{aligned}$$

Im Ergebnis erhält der Schüler eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Diese kann der Schüler entweder durch eine Polynomdivision oder durch die Anwendung des Horner-Schemas um einen Grad reduzieren. Hierzu muss in jedem Fall eine Nullstelle geraten werden. Im folgenden Beispiel wird eine Nullstelle bei $x = -2$ geraten und in ein Horner-Schema eingesetzt.

① Nullstellen:

$$0 = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$$

⇒ Hornerschema mit $x_0 = -2$

	2	7	4	-4	
	0	-4	-6	4	
$x_0 = -2$	2	3	-2	<u>0</u>	$N_1(2 0)$

Durch das Horner-Schema wird z. E. die geratene Nullstelle bestätigt, zum anderen wird in der Ergebniszeile die Koeffizienten-Matrix einer Funktion 2. Grades geliefert, die für die weiteren Berechnungen herangezogen werden kann. Ausgehend von dieser quadratischen Funktion können über den Einsatz der p-q-Formel die anderen beiden Nullstellen errechnet werden.

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 + 3x - 2 \quad | :2 \\ 0 &= x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \quad | \Rightarrow p\text{-}q\text{-Formel} \end{aligned}$$

$$x_{1/3} = -\frac{\frac{3}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 + 1}$$

$$x_{1/3} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{1\frac{9}{16}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{3}{4} \pm 1\frac{1}{4}$$

$$x_2 = -\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad N_2\left(\frac{1}{2} | 0\right)$$

$$x_3 = -\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = -2 \quad N_3(-2 | 0)$$

② y-Achsen-Abschnitt

$$f(0) = 2 \cdot 0^3 + 7 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 4$$

$$f(0) = \underline{\underline{-4}} \quad S_y(0 | -4)$$

ÜBUNGSKLAUSUR:

Bei Teilaufgabe d kommt für die Berechnung der Nullstellen, das sogenannte Substitutionsverfahren zum Einsatz. x^4 wird durch z^2 ersetzt und x^2 durch z . Anschließend kann die Lösung für $z_{1/2}$ durch die p-q-Formel ermittelt werden. Um die Substitution anschließend wieder rückgängig zu machen, muss aus den beiden Lösungen für z noch jeweils die Quadratwurzel gezogen werden. Da einer der beiden Lösungen für z eine negative Zahl ist, gibt es an dieser Stelle nur zwei reelle Lösungen.

$$d) f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2$$

① Nullstellen

$$0 = 2x^4 + 3x^2 - 2 \quad | \Rightarrow \text{Substitution} \\ x^4 = z^2, x^2 = z$$

$$0 = 2z^2 + 3z - 2 \quad | :2 \\ 0 = z^2 + \frac{3}{2}z - 1 \quad | \Rightarrow \text{p-q-Formel}$$

$$z_{1/2} = -\frac{\frac{3}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 + 1}$$

$$z_{1/2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1}$$

$$z_{1/2} = -\frac{3}{4} \pm 1\frac{1}{4}$$

$$z_1 = -\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$z_2 = -\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = -2 \Rightarrow x_{2/4} = \pm\sqrt{-2}$$

② y-Achsen-Abschnitt

$$f(0) = 2 \cdot 0^4 + 3 \cdot 0^2 - 2$$

$$f(0) = -2 \quad S_y(0|-2)$$

$$N_1(-0,71|0) \quad N_2(0,71|0)$$

$$x_1 = -0,71; x_2 = 0,71$$

Wurzel aus negativer Zahl hat keine reelle Lösung!

Lösung Aufgabe 2:

In Aufgabe 2 geht es darum den Schnittpunkt zwischen zwei Funktionen zu berechnen. Hierzu werden die beiden Funktionen gleichgesetzt. Hieraus entsteht eine ganzrationale Funktion 2. Grades, die durch die p-q-Formel gelöst werden kann. Es werden zwei Ergebnisse für x ermittelt.

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 5$$

$$g(x) = 2x + 2$$

⇒ Gleichsetzen:

$$4x^2 + 6x - 5 = 2x + 2 \quad | -2x \quad | -2$$

$$4x^2 + 4x - 7 = 0 \quad | :4$$

$$x^2 + x - \frac{7}{4} = 0 \quad | \Rightarrow \text{p-q-Formel}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm 1,414...$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + 1,414 = 0,914$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - 1,414 = -1,914$$

ÜBUNGSKLAUSUR:

Die x -Koordinaten muss der Schüler anschließend noch die zugehörigen y -Koordinaten zuordnen. Dies erreicht er, indem er die beiden Ergebnisse in eine der beiden Ausgangsgleichungen einsetzt. Aus beiden Koordinatensätzen können dann die beiden Schnittpunkte benannt werden.

$$\begin{aligned} g(0,341) &= 2 \cdot 0,341 + 2 = 3,882 & S_1 (0,341 | 3,882) \\ g(-1,914) &= 2 \cdot (-1,914) + 2 = -1,828 & S_2 (-1,914 | -1,828) \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 3:

Ziel dieser Aufgabe ist es zu prüfen, ob der Schüler die gelernten Konzepte auch auf praktische Aufgaben anwenden kann. Es bietet sich an, bei derartigen Aufgaben, zunächst die relevanten Größen festzuhalten. Diese sind:

Fixe Kosten	20.000,- €	
variable Kosten	7,50 €	pro Stück
Vk-Preis	15,00 €	pro Stück

Hieraus können in Teilaufgabe a die beiden Funktionen für die Gesamtkosten und den Erlös bestimmt werden.

$$\begin{aligned} a) \quad K(x) &= 7,5x + 20.000 \\ E(x) &= 15,0x \end{aligned}$$

In Teilaufgabe b soll dann die Nutzenschwelle des Betriebs errechnet werden. Die Nutzenschwelle ist die Ausbringungsmenge die mindestens produziert werden muss, damit die Unternehmung keinen Verlust erwirtschaftet. Dies ist dann der Fall, wenn Kosten und Erlös genau gleich groß sind. Was wir suchen ist als der Schnittpunkt dieser beiden Funktionen.

b) Berechnung der Nutzenschwelle:

⇒ Gleichsetzungsverfahren:

$$\begin{aligned} 7,5x + 20.000 &= 15,0x & | -7,5x \\ 20.000 &= 7,5x & | : 7,5 \\ 2.666\frac{2}{3} &= x \end{aligned}$$

Industriebetriebe können nur ganze Stücke herstellen ⇒ 2.667 ist die Nutzenschwelle!

ÜBUNGSKLAUSUR:

Zuletzt soll der Schüler in Teilaufgabe c noch eine Skizze der Funktionsgraphen anfertigen. Die Herausforderung dabei besteht darin, eine geeignete Skalierung für die Achsen zu finden. Hierfür ist es hilfreich wenn zuvor Teilaufgabe b gelöst wurde, da so ein Eindruck vom notwendigen Wertebereich gewonnen werden kann.

